

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园
首页
新随笔
联系
订阅
管理

2022年3月						
日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力
欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的
园龄：4年7个月
粉丝：288
关注：5
+加关注

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动你的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

马上参与

搜索

找找看

谷歌搜索

常用链接

我的随笔
我的评论
我的参与
最新评论
我的标签

积分与排名

积分 - 457097
排名 - 1198

线性代数笔记24——微分方程和exp(At)

原文：

<https://mp.weixin.qq.com/s/COpYKxQDMhqJRuMK2raMKQ>

微分方程指含有未知函数及其导数的关系式，解微分方程就是找出未知函数。未知函数是一元函数的，叫常微分方程；未知函数是多元函数的，叫做偏微分方程。常微分方程有时也简称方程。微分方程是一门复杂的学科，对于常微分方程来说，可以使用特征值和特征向量的知识求解。

相关前置知识：

- 微分方程：[单变量微积分11——常微分方程和分离变量](#)
- 泰勒公式：[单变量微积分30——幂级数和泰勒级数](#)
- 泰勒公式在0点展开的原因：[多项式函数能够拟合非线性问题原理](#)
- 求逆矩阵：[线性代数笔记8——求解逆矩阵](#)
- 求行列式：[线性代数20——行列式和代数余子式](#)
- 特征值和特征向量：[线性代数22——特征值和特征向量](#)
- 矩阵对角化：[线性代数笔记23——矩阵的对角化和方幂](#)

常微分方程的一般解法

根据概念构造一个常微分方程：

$$\frac{du}{dt} = 2t$$

目标是求得原函数 $u=u(t)$ 的具体形式。通过积分求解：

$$\begin{aligned} du &= 2t dt \\ \int du &= \int 2t dt \\ u + C_1 &= t^2 + C_2 \\ u &= t^2 + C_2 - C_1 = t^2 + C \end{aligned}$$

这就是最终答案的通解， C 是任意常数。实际上这种解法就是利用了不定积分的知识：

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= f(t) \\ du &= f(t) dt \\ u &= \int du = \int f(t) dt \end{aligned}$$

随笔分类 (211)

★★资源下载★★(1)
Java并发编程(1)
程序员的数学(24)
单变量微积分(31)
多变量微积分(24)
概率(24)
机器学习(27)
软件设计(1)
数据分析(6)
数据结构与算法(27)
随笔(5)
线性代数(34)
项目管理(2)
转载(4)

随笔档案 (205)

2021年2月(1)
2020年3月(2)
2020年2月(6)
2020年1月(4)
2019年12月(7)
2019年11月(15)
2019年9月(3)
2019年8月(6)
2019年7月(1)
2019年6月(8)
2019年5月(3)
2019年4月(5)
2019年3月(7)
2019年2月(3)
2019年1月(7)
更多

阅读排行榜

1. 使用Apriori进行关联分析 (一) (29768)
2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (28772)
3. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(24430)
4. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(23099)
5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

1. 隐马尔可夫模型 (一) (8)
2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (7)
3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (7)
4. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(5)
5. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

1. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(7)
2. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(7)
3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (6)
4. FP-growth算法发现频繁项集 (二)——发现频繁项集(5)
5. 隐马尔可夫模型 (一) (5)

最新评论

1. Re:线性代数笔记3——向量2 (点积)
如果点积小于0, 即夹角小于90°, 这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫猫大人

如果 $du/dt=u$ ，可以使用分离变量法的求解方式：

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= u \\ du &= udt \\ \frac{du}{u} &= dt \\ \int \frac{1}{u} du &= \int dt \\ \ln u + C_1 &= t + C_2 \\ \ln u &= t + C_2 - C_1 = t + C \\ e^{\ln u} &= e^{t+C} \\ u &= e^C e^t = Ae^t\end{aligned}$$

也就是说，当函数的导数是函数本身的时候，这个函数就是型如 Ae^t 的函数，由于 $A=e^C$ 是任意常数，所以经常用 C 代替 A ，写成 $u=Ce^t$ 的形式。

同理，对于 $du/dt=\lambda u$ ，微分方程的解是 $u(t)=Ce^{\lambda t}$ 。当 $t=0$ 时：

$$u(0) = Ce^{\lambda t} = C$$

由于 C 是任意常数，因此可以取 $C=u(0)$ ，得到 $u(t)=u(0)e^{\lambda t}$ ，这样做可以去掉常数 C 。在实际问题中， u 可以表示关于时间 t 的函数，对于时间来说，通常可以把 $t=0$ 看作初始条件。

常微分方程与矩阵

现在将常微分方程扩展为常微分方程组， $u_1=u_1(t)$ ， $u_2=u_2(t)$ ，初始条件是 $t=0$ ，初始值是 $u(0)=(1,0)$ ，求解微分方程：

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = -u_1 + 2u_2 \\ \frac{du_2}{dt} = u_1 - 2u_2 \end{cases}$$

可以把微分方程组写成向量矩阵的形式：

$$\text{let } u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \text{then } \frac{du}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{du_1}{dt} \\ \frac{du_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

A u

相当于将常微分方程中转换成了 $du/dt = Au$ 的线性形式。

常微分方程的线性代数解法

对于 $du/dt = Au$ 来说， u_1 和 u_2 之间存在耦合（没有耦合就没必要写成方程组了）， A 表示它们的耦合关系：

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = -u_1 + 2u_2 \\ \frac{du_2}{dt} = u_1 - 2u_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{du}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = Au \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

A 可以用特征值和特征向量对角化，因此方程的解和矩阵 A 的特征值和特征向量存在关联关系。先求矩阵 A 的特征值。

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At)

有些图片挂了呢

--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中

$v = \{2gh\}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU

或许你可以马上看出 A 是个奇异矩阵，因此一个特征值是 $\lambda_1=0$ 。特征值之和是矩阵的迹，迹是矩阵主对角线元素和，因此可以求得另一个特征值是 $\lambda_2=(-1-2)-0=-3$ 。

当然也可以用正统的方法求解：

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(-2-\lambda) - 2 \times 1 = 3\lambda + \lambda^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -3$$

接下来根据特征方程求得特征向量。

$$Ax = \lambda x \Rightarrow (A - \lambda I)x = 0$$

$$\lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\text{when } \lambda = \lambda_1, \quad (A - \lambda_1 I)x = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x = 0, \quad x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{when } \lambda = \lambda_2, \quad (A - \lambda_2 I)x = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x = 0, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

特解

微分方程组有两组特解：

$$v_1 = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = e^{\lambda_1 t} x_1 \quad \text{or} \quad v_2 = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = e^{\lambda_2 t} x_2$$

这是两个纯指数解的组合。需要注意的是，这里 x_1 和 x_2 都是二维向量，因此 v_1 和 v_2 也是二维的。

来验证一下 v_1 ，如果 $u=v_1$ 是方程的解，把 v_1 代入原方程：

$$\frac{dv_1}{dt} = Av_1$$

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{d(e^{\lambda_1 t} x_1)}{dt} = \lambda_1 e^{\lambda_1 t} x_1 \quad \text{①}$$

$$Av_1 = Ae^{\lambda_1 t} x_1 \quad \text{②}$$

只要验证①=②是否成立就可以了，假设等式成立：

$$\lambda_1 e^{\lambda_1 t} x_1 = Ae^{\lambda_1 t} x_1$$

$$\lambda_1 x_1 = Ax_1$$

x_1 和 λ_1 是 $Ax=\lambda x$ 的一组特征向量和特征值，因此①=②成立， v_1 是微分方程的解。同理， v_2 也是微分方程的解。

通解

对于 $du/dt = Au$ 来说，如果 v_1 和 v_2 是方程的解，那么它们的线性组合也是方程的解，因此微分方程的通解是：

$$u(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} x_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} x_2$$

验证的方法和验证特解类似：

$$\frac{du}{dt} = \frac{d(C_1 e^{\lambda_1 t} x_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} x_2)}{dt} = C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} x_1 + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} x_2 \quad \text{③}$$

$$Au = A(C_1 e^{\lambda_1 t} x_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} x_2) = AC_1 e^{\lambda_1 t} x_1 + AC_2 e^{\lambda_2 t} x_2 \quad \text{④}$$

只要验证③=④是否成立就可以了，假设等式成立：

$$C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{x}_1 + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{x}_2 = A C_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{x}_1 + A C_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{x}_2$$

当 $C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{x}_1 = A C_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{x}_1$ ⑤ 且 $C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{x}_2 = A C_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{x}_2$ ⑥ 时，上式恒成立

对于⑤来说， $C_1 e^{\lambda_1 t}$ 是标量，等式两侧同时除以 $C_1 e^{\lambda_1 t}$ ： $\lambda_1 \mathbf{x}_1 = A \mathbf{x}_1$

$\mathbf{x}_1$ 和 λ_1 是 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ 的一组特征向量和特征值，因此⑤成立。同理，⑥也成立，因此通解成立。

最后将 λ 和 $\mathbf{x}$ 的值代入通解：

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -3, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{x}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{x}_2 = C_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

如果没有初始条件，到这里就结束了，这就是 $\mathbf{u}(t)$ 的形态。本例给出了初始值，可以由此继续计算出 C_1 和 C_2 ：

$$t = 0, \quad \mathbf{u}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{u}(0) = C_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C_1 = C_2 = \frac{1}{3}$$

$$\mathbf{u}(t) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} e^{-3t} \\ u_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} e^{-3t} \end{cases}$$

当 $t \rightarrow \infty$ 时：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{u}(t) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{3} e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

随着 t 的增加， $\mathbf{u}(t)$ 逐渐收敛到一个定值，我们称 $\mathbf{u}(t)$ 为稳态。

通解指出了当 A 是 2×2 矩阵时 $\mathbf{u}(t)$ 达到稳态的条件： A 的其中一个特征值是 0，且另一个特征值小于 0（如果是复数，则复数的实部小于 0）。如果 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$ ， $\mathbf{u}(t)$ 是发散的。

解耦

回顾上一节的内容，在通过初始值求解 C 的时候：

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

如果用 S 表示特征向量矩阵，则上式可以写成 $S\mathbf{c} = \mathbf{u}(0)$ ，即通过 $S\mathbf{c} = \mathbf{u}(0)$ 可以求得 $\mathbf{c}$ 。

$$S = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2]$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} S & \mathbf{c} & \mathbf{u}(0) \end{matrix}$$

常微分方程组 $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = A\mathbf{u}$ ， $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ ， u_1, u_2 是两个互相耦合的未知函数， A 表明了它们的耦合关系，求解微分方程组的关键是如何解耦，而解耦的方式正是利用特征值和特征向量。现在的问题是，能否把微分方程的解表示成 S 和 Λ 的形式（ Λ 是特征值矩阵，参考上一章内容）？

既然 $\mathbf{u}$ 是通过 $\mathbf{A}$ 耦合的， $\mathbf{A}$ 又能通过 $\mathbf{S}$ 和 $\mathbf{\Lambda}$ 对角化 ($\mathbf{A}=\mathbf{S}\mathbf{\Lambda}\mathbf{S}^{-1}$)，因此 $\mathbf{u}$ 可以用特征向量矩阵 $\mathbf{S}$ 解耦，令 $\mathbf{u}=\mathbf{S}\mathbf{v}$ ， $\mathbf{v}(t)$ 是某个未知的常微分方程组：

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{u} \\ \frac{d\mathbf{S}\mathbf{v}}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{v}\end{aligned}$$

$\mathbf{S}$ 是常矩阵，因此：

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{S}\mathbf{v}}{dt} &= \mathbf{S}\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{v} \\ \xrightarrow{\text{等式两侧同时乘以}\mathbf{S}^{-1}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{v}\end{aligned}$$

根据上一章矩阵对角化的内容：

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \mathbf{S}\mathbf{\Lambda}\mathbf{S}^{-1} \Rightarrow \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{\Lambda} \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{v} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{v}\end{aligned}$$

这实际上是得到了没有耦合的新方程组：

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \begin{bmatrix} \frac{dv_1}{dt} \\ \frac{dv_2}{dt} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{v} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{dv_1}{dt} = \lambda_1 v_1 \\ \frac{dv_2}{dt} = \lambda_2 v_2 \end{cases}\end{aligned}$$

每个方程都可以套用一开始讲过的内容： $du/dt=\lambda u$ ，微分方程的解是 $u(t)=Ce^{\lambda t}$ ，再代入初始条件 $t=0$ ， $u(t)=u(0)e^{\lambda t}$ ：

$$v_1(t) = v_1(0)e^{\lambda_1 t} = e^{\lambda_1 t}v_1(0), \quad v_2(t) = v_2(0)e^{\lambda_2 t} = e^{\lambda_2 t}v_2(0)$$

将二者合并：

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{bmatrix} \\ \mathbf{v}(t) &= e^{\mathbf{\Lambda}t}\mathbf{v}(0) \\ \mathbf{u}(t) &= \mathbf{S}\mathbf{v}(t) = \mathbf{S}e^{\mathbf{\Lambda}t}\mathbf{v}(0)\end{aligned}$$

$\mathbf{v}(0)$ 的具体值我们不知道也不关心，只知道是个常向量， $\mathbf{S}\mathbf{c}=\mathbf{u}(0)$ ， $\mathbf{c}$ 是任意常向量，设 $\mathbf{c}=\mathbf{v}(0)$ ：

$$\begin{aligned}\mathbf{S}\mathbf{v}(0) &= \mathbf{u}(0) \Rightarrow \mathbf{v}(0) = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{u}(0) \\ \mathbf{u}(t) &= \mathbf{S}e^{\mathbf{\Lambda}t}\mathbf{v}(0) = \mathbf{S}e^{\mathbf{\Lambda}t}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{u}(0)\end{aligned}$$

更进一步：

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{S}e^{\mathbf{\Lambda}t}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{u}(0) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{u}(0)$$

接下来解释为什么会得到这个结论。

矩阵指数 $\exp(At)$

$\mathbf{A}$ 是矩阵， $e^{\mathbf{A}t}$ 是以矩阵为指数的表达式，它代表什么意思呢？

我们知道 $f(x)$ 在 $x=0$ 点处的泰勒展开式：

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

e^x 在 $x_0=0$ 点处的泰勒展开式是：

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

0的阶乘是1。展开式是收敛的，越靠后的项对总体的影响越小，越接近于0。证明起来较为容易：

$$\frac{\frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}}{\frac{1}{n!}x^n} = \frac{x^n x}{n!(n+1)} \times \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n+1} = 0$$

因此 e^x 是收敛的。

同样， e^{At} 也在 $At=0$ 点处进行泰勒展开，注意这里的 0 是 A 的同阶零矩阵， e^0 等于单位矩阵：

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}(At)^2 + \frac{1}{3!}(At)^3 + \dots + \frac{1}{n!}(At)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!}$$

e^{At} 也是收敛的。

上一章已经讲过矩阵的对角化：

$$A = SAS^{-1}, \quad A^k = SA^kS^{-1}$$

代入到 e^{At} 中：

$$\begin{aligned} e^{At} &= I + At + \frac{1}{2!}(At)^2 + \frac{1}{3!}(At)^3 + \dots + \frac{1}{n!}(At)^n \\ &= SS^{-1} + SAS^{-1}t + \frac{1}{2!}SA^2S^{-1}t^2 + \frac{1}{3!}SA^3S^{-1}t^3 + \dots + \frac{1}{n!}SA^nS^{-1}t^n \\ &= S\left(S^{-1} + AS^{-1}t + \frac{1}{2!}A^2S^{-1}t^2 + \frac{1}{3!}A^3S^{-1}t^3 + \dots + \frac{1}{n!}A^nS^{-1}t^n\right) \\ &= S\left(I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \dots + \frac{1}{n!}A^nt^n\right)S^{-1} \end{aligned}$$

中间的一大堆正好是 e^{At} 的泰勒展开式，因此 e^{At} 最终可以写成：

$$e^{At} = Se^{At}S^{-1}$$

这就是矩阵指数的公式，当然，上式成立的前提是 A 可以对角化，即 $A_{n \times n}$ 存在 n 个独立的特征向量。

最后来看看 e^{At} 是什么。

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

$$u(t) = e^{At}u(0) = Se^{At}S^{-1}u(0) = Se^{At}(S^{-1}u(0))$$

$$\text{其中: } Se^{At} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}, \quad S^{-1}u(0) = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{At}u(0) = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} \\ &= C_1 x_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 x_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + C_n x_n e^{\lambda_n t} \end{aligned}$$

和通解的形式一致，如果有初始值，可以根据初始值计算出具体的C。

二阶常微分方程

现在有一个二阶常微分方程：

$$y'' + by' + ky = 0, \quad y = y(t)$$

求解时需要把方程转换成矩阵的形式：

$$\begin{aligned} \text{let } u &= \begin{bmatrix} y' \\ y \end{bmatrix}, \quad \text{then } u' = \begin{bmatrix} y'' \\ y' \end{bmatrix} \\ y'' + by' + ky &= 0 \Rightarrow y'' = -by' - ky \\ \Rightarrow u' &= \begin{bmatrix} y'' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -by' - ky \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b & -k \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y' \\ y \end{bmatrix} \\ \frac{du}{dt} & \qquad \qquad \qquad A \qquad u \end{aligned}$$

这就又变成了 $du/dt=Au$ 的形式，可以用矩阵直接求解。

综合示例

求解三阶常微分方程并构建 e^{At} ：

$$y''' + 2y'' - y' - 2y = 0, \quad y = y(t)$$

$$\begin{aligned} \text{let } u(t) &= \begin{bmatrix} y''' \\ y'' \\ y' \\ y \end{bmatrix} \\ \text{then } u' &= \begin{bmatrix} y'''' \\ y''' \\ y'' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2y''' + y'' + 2y' \\ y''' \\ y'' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y''' \\ y'' \\ y' \end{bmatrix} \\ \text{let } A &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{then } \frac{du}{dt} = Au \\ u(t) &= C_1 x_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 x_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 x_3 e^{\lambda_3 t} \end{aligned}$$

接下来需要求得A的特征值和特征矩阵。根据特征方程可得到：

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= (-2-\lambda) \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (-2-\lambda)\lambda^2 + \lambda + 2 \\ &= (\lambda+2)(1-\lambda^2)\end{aligned}$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = -2$$

接下来通过3个特征值求的特征向量：

$$(A - \lambda_1 I)x = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) x = 0$$

$$\text{let } x = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad \text{then } \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow a = b = c$$

第1个特征向量的特解是：

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

类似的方式求得另外两个特征向量：

$$x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

u(t)的通解：

$$\begin{aligned}u(t) &= C_1 x_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 x_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 x_3 e^{\lambda_3 t} = C_1 x_1 e^t + C_2 x_2 e^{-t} + C_3 x_3 e^{-2t} \\ &= C_1 \begin{bmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix} + C_3 \begin{bmatrix} 4e^{-2t} \\ -2e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} y'' \\ y' \\ y \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow y = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 e^{-2t}$$

最后来构建 e^{At} ：

$$e^{At} = S e^{\Lambda t} S^{-1}$$

$$S = [x_1 \quad x_2 \quad x_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

相关前置知识：

微分方程：[单变量微积分11——常微分方程和分离变量](#)

泰勒公式：[单变量微积分30——幂级数和泰勒级数](#)

泰勒公式在0点展开的原因：[多项式函数能够拟合非线性问题原理](#)

求逆矩阵: [线性代数笔记8——求解逆矩阵](#)

求行列式: [线性代数20——行列式和代数余子式](#)

特征值和特征向量: [线性代数22——特征值和特征向量](#)

矩阵对角化: [线性代数笔记23——矩阵的对角化和方幂](#)

作者: 我是8位的

出处: <http://www.cnblogs.com/bigmonkey>

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

扫描二维码关注作者公众号“我是8位的”



随笔

分类: [线性代数](#)

标签: [微分方程和exp\(At\)](#)

[好文要顶](#)[关注我](#)[收藏该文](#)



我是8位的

关注 - 5

粉丝 - 288

[+加关注](#)

1

0

推荐

反对

« 上一篇: [数据分析\(4\)——闲话抽样](#)
» 下一篇: [线性代数笔记25——马尔可夫矩阵](#)

posted on 2019-11-16 00:02 我是8位的 阅读(3947) 评论(3) 编辑 收藏 举报

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

 登录后才能查看或发表评论，立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) [博客园首页](#)

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集，分享最打动你的科技女性故事
【推荐】华为开发者专区，与开发者一起构建万物互联的智能世界

cloud.e-iceblue.cn

JAVA Office
文档在线编辑
APIs

打开

编辑推荐:

- 革命性创新，动画杀手铜 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计（十二）—— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]：内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的？
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#
HWD科技女性故事有奖征集
活动时间: 2022年3月8日-3月18日



最新新闻:

- 乔布斯的创业搭档：他缺乏工程师才能，不得不锻炼营销能力来弥补
 - 美国大厂码农薪资曝光：年薪18万美元，够养家，不够买海景房
 - 两张照片就能转视频！Google提出FLIM帧插值模型
 - Android 再推“杀手级”功能，可回收 60% 存储空间
 - 溺在理财暴雷潮的投资人：本金63万，月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

历史上的今天:

2017-11-16 单变量微积分笔记21——三角替换2 (tan和sec)

Powered by:

博客园

Copyright © 2022 我是8位的
Powered by .NET 6 on Kubernetes